

## Elaborazione numerica dei segnali

### Introduzione. Strumenti analogici e digitali.

Precedentemente allo sviluppo dell'elettronica digitale ( numerica ) gli strumenti erano tutti “analogici”: funzionavano mettendo in analogia 2 grandezze di natura diversa, tramite un sistema di trasposizione elettromeccanico. Se negli strumenti digitali si ha in uscita sul display direttamente il valore numerico della grandezza in esame, negli strumenti analogici la misura della grandezza in esame poteva essere stimata dalla posizione di un indice sopra una scala graduata. Un semplice strumento di misura analogico e' l'orologio meccanico (in figura accanto ad uno digitale).



Figura 1

Un altro esempio può essere il tachimetro di una automobile. Esso sfruttava il pattinamento trasmesso da un cavetto flessibile ad una ruota che sfizionava contro un altro dischetto – ancorato ad una molla - all'interno dello strumento provocando la variazione di posizione di un indice. Vedi figura

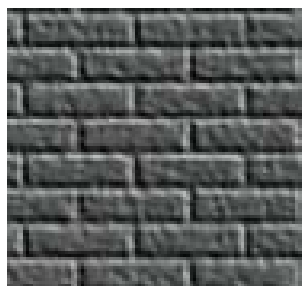


Figura 2

La registrazione delle grandezze misurate da questi strumenti avveniva “in continuo”, al contrario della misurazione digitale, che avviene in modo “discreto”, ovvero solo in alcuni momenti scelti con una regola prefissata. I registratori capaci di fare ciò erano registratori a nastro magnetico, tipo quello delle audiocassette, o registratori a nastro di carta, tipo quello dello strumento come l'elettrocardiografo oppure il sismografo (vedi foto).

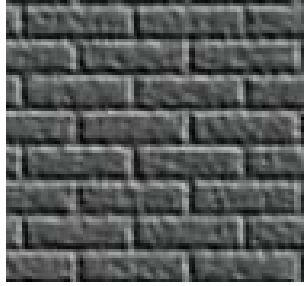


Figura 3

Tali registrazioni potevano contenere una singola traccia – ovvero la registrazione di un solo parametro – oppure piu' tracce. L'inconveniente principale di tali strumenti era ed e' il notevole dispendio di spazio per memorizzare l'andamento temporale di un singolo evento, nonostante fossero utilizzati svariati espedienti per ovviare alle limitazioni del metodo. Ad esempio: una prova elettrocardiografica da sforzo dura circa 15 minuti e si registrano 9 tracciati e.c.g. Un elettrocardiografo a carta fa scorrere la registrazione del tracciato a circa 1 cm il secondo ( con una risoluzione temporale degli eventi di circa  $1/10$   $1/20$  di secondo ed una dinamica di qualche millivolt al centimetro ). Per tutto l'esame occorrono quindi 9 metri di carta. Con una registrazione digitale dell'esame ed imponendo una risoluzione temporale di  $1/500$  di secondo ed una dinamica di 16 bit ( quantizzazione a 65536 livelli ovvero meno di 10 microvolt a livello di quantizzazione ) abbiamo circa 60/70 MegaByte di dati, che possono essere tranquillamente memorizzati in un mini-cd ( card-cd ) il quale può essere conservato senza alcun problema di danneggiamento della qualità e della leggibilità del segnale nel tempo.



Figura 4

Con lo sviluppo della tecnologia digitale tali limiti sono stati superati, grazie alla forte miniaturizzazione delle componenti elettroniche e alla possibilità di memorizzare grandi quantità di numeri direttamente su componenti elettroniche. Ciò consente di registrare una quantità impensabile di dati relativamente agli eventi da misurare, ma tale registrazione avviene in modo non continuo nel tempo. Da questo fatto e' nata l'elaborazione numerica dei segnali ovvero la DSP: Digital Signal Processing.

Questa è una scienza giovane, che ha avuto il suo massimo sviluppo negli ultimi 15 anni grazie ai progressi compiuti dai componenti elettronici ad altissima integrazione, e alla nascita degli omonimi processori specializzati utilizzati per l'elaborazione.

Attualmente l'impiego di questi processori dedicati, nella maggior parte dei casi è limitato alle tecnologie di basso costo quali la telefonia cellulare, altrove si preferisce l'impiego dei calcolatori elettronici che garantiscono a parità di prestazione una maggior praticità nella programmazione.

L'analisi computerizzata di un segnale analogico, cioè caratterizzato da infiniti valori che variano con continuità, richiede la conversione del segnale in digitale in modo particolare in un segnale digitale binario costituito da una sequenza dei soli valori 0-1, così da consentirne l'elaborazione tramite una CPU.

La conversione viene effettuata tramite un convertitore analogico-digitale (A/D) inserito in un circuito schematizzato dal seguente diagramma a blocchi. Supponiamo di voler digitalizzare (quantizzare) un segnale acustico; lo schema di massima dello strumento necessario per tale operazione è il seguente:

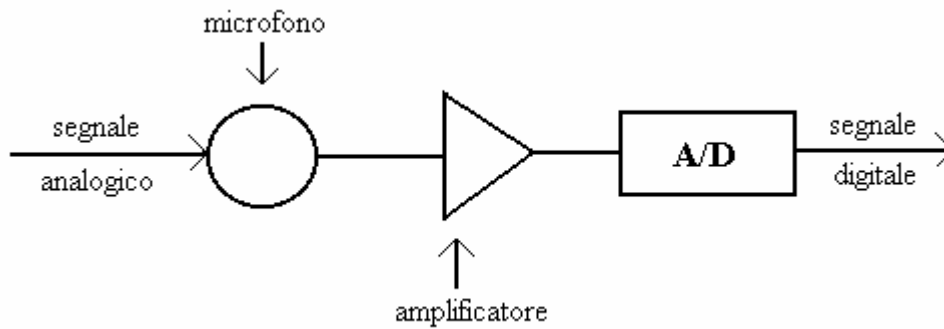


Figura 5

In questa figura il "segnale analogico" è la grandezza in ingresso che come abbiamo detto è una grandezza fisica che varia con continuità in range, ma assumendo tutti gli infiniti valori possibili in tale range, mentre il "segnale digitale" in uscita è un insieme discreto e finito di valori numerici che variano anche in un range differente, ma sono correlati temporalmente e quantitativamente con la grandezza in ingresso. Nella figura riportata di seguito il blocco "apparato di conversione" corrisponde a tutto lo strumento riportato nella figura precedente.

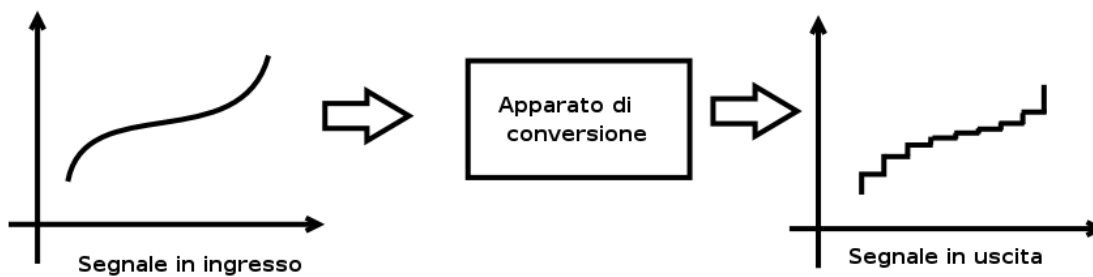


Figura 6

Immaginiamo di dover campionare e quantizzare un suono, con lo strumento il cui schema di massima è riportato nella figura n.5. Il segnale in ingresso è composto da una somma di segnale utile e di rumore dovuto a svariate cause, quali per esempio la presenza di altre fonti di suoni. Il segnale utile che deve essere registrato è, nell'esempio in figura, la variazione di pressione acustica prodotta dalla sorgente del segnale stesso. Tale segnale viene convertito in una debole tensione elettrica dal microfono, che svolge la funzione **trasduttore**, ovvero cioè di dispositivo che cambia la natura del segnale senza alterarne la forma, trasformandolo in questo caso da variazione di pressione a variazione di tensione elettrica. Poiché la tensione prodotta dal microfono è, come ordine di grandezza, piuttosto ridotta è necessario aumentarne l'intensità tramite l'amplificatore prima di poterla elaborare ulteriormente. Sia microfono che amplificatore sono componenti analogici, infatti l'andamento della tensione prima e dopo l'amplificazione è analogo alla pressione acustica in ingresso a meno di una costante moltiplicativa.

A questo punto entra in azione il convertitore A/D.

La mappatura del segnale analogico da parte del convertitore A/D viene effettuata tramite due operazioni: il **campionamento** e la **quantizzazione**.

Il **campionamento** consente, partendo da un segnale a tempo continuo – ovvero che fluisce con continuità nel tempo, di ottenere un segnale a tempo discreto, cioè una successione o sequenza  $x[n]$  di numeri rappresentabile con una funzione di variabile intera relativa avente valori reali o complessi. Fra i numeri della sequenza  $x[n]$  ed il successivo  $x[n+1]$  non c'è segnale. L'operazione di campionamento “mette a zero” il valore della grandezza in esame al di fuori dei momenti del campionamento stesso: tutto l'andamento del segnale al di fuori dei momenti del campionamento viene perso. Per questo motivo, anticipiamo qui la problematica, se non vogliamo perdere tale informazione, o aumentiamo la frequenza di campionamento eseguendone uno più fitto oppure cerchiamo di lavorare con un segnale abbastanza “regolare” che non abbia grosse variazioni al di fuori dei momenti di campionamento.

Campionare un generico segnale  $x(t)$  significa “estrarre” dal segnale stesso i valori che esso assume a istanti temporali equispaziati, cioè multipli di un intervallo  $T$  detto periodo di campionamento. Con questa operazione viene a crearsi una sequenza il cui valore  $n$ -esimo  $x[n]$  è il valore assunto dal segnale a tempo continuo all'istante  $nT$ :  $x[n]=x(nT)$ .

L'operazione di campionamento viene simbolicamente effettuata da un dispositivo, il campionatore, indicato con una sorta di interruttore che si chiude per un intervallo di durata infinitesima. La cadenza con cui l'interruttore si chiude è pari a:

$$f_c = \frac{1}{T} \quad (1)$$

e prende il nome frequenza di campionamento (sampling frequency), misurata in Hz o in campioni/secondo. Prima dell'avvento del digitale il campionamento era ottenuto tramite filtri analogici passivi, la cui curva di risposta in frequenza approssimava con curve gaussiane lo spettro delle odierne bande, e in cui veniva fatto passare il segnale. In Figura 7 è rappresentato un generico segnale analogico in funzione del tempo  $t$ , si può vedere come vari con continuità. L in ordinata rappresenta il livello del segnale, che per i segnali acustici è solitamente espressa in decibel (dB).

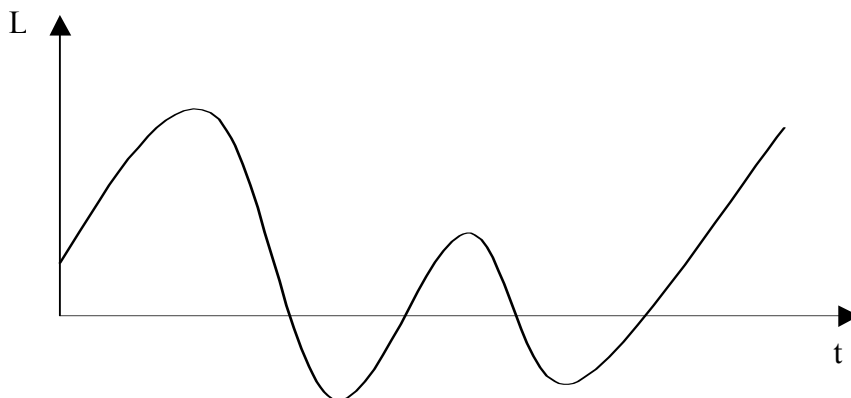


Figura 7: Segnale fisico ( analogico ) in ingresso allo strumento.

La Figura 8 rappresenta il corrispettivo digitale del precedente segnale analogico: in questo caso si vede chiaramente che abbiamo a che fare con una sequenza discreta di valori e non più con un continuo, coi valori della sequenza che distano tra loro un tempo  $T$  pari al periodo di campionamento.

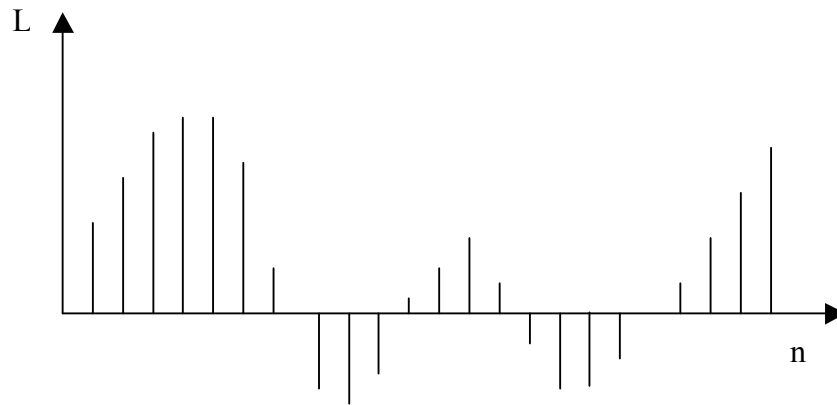


Figura 8: Segnale digitale in uscita dallo strumento

Il convertitore A/D è comandato da un segnale di clock (temporizzazione) alla frequenza di campionamento. Il campionatore ideale estrae in corrispondenza di ogni impulso di clock il valore del segnale in ingresso all'istante di campionamento, che è in generale un numero reale con infinite cifre decimali. Diversamente dal campionatore ideale, il convertitore A/D rende invece una rappresentazione finita di questo numero reale (segnale numerico), e precisamente in aritmetica binaria su un numero finito di cifre (bit), variabile da 8 a 24 [ da 1 Byte a 4 Byte ovvero da 256 fino a 16,77 milioni di livelli di quantizzazione, la quale spesso è sovrabbondante per gli scopi più comuni ].

L'errore insito nella rappresentazione del numero reale su un numero finito di cifre rappresenta la seconda operazione del convertitore: la **quantizzazione**. È un errore tanto più piccolo quanto maggiore è il numero di livelli di quantizzazione, ma è un rumore ineliminabile, una volta eseguita la quantizzazione; inoltre ridurre il rumore di quantizzazione oltre un certo livello comporta da un lato l'aumento dello spazio di memorizzazione dall'altro la complessità e la delicatezza circuitale dello strumento che esegue l'operazione.

***Nota bene:** oltre certi limiti è inutile cercare di ridurre tale rumore in quanto il segnale è comunque affetto da altri tipi di rumore fra cui, non ultimo, il rumore dovuto agli strumenti che lo processano. Quando il rumore di quantizzazione diventa dello stesso ordine di grandezza del rumore inserito dagli altri "blocchi" non è più possibile distinguerlo da esso. Per questo motivo è perfettamente inutile aumentare oltre questo valore la quantizzazione del segnale in uscita. La problematica della stima del rumore inserito da ogni passaggio sul segnale originale e la cosiddetta "pulizia del segnale dal rumore" sono argomenti di fondamentale importanza quando si compiono operazioni di campionamento e quantizzazione di segnali al limite della risoluzione strumentale.*

Tornando allo strumento di cui stavamo originariamente parlando, possiamo dire che di fatto quindi il convertitore effettua una doppia operazione di "discretizzazione": la prima sull'asse dei tempi, dove determina gli istanti in cui si deve considerare il segnale per il suo trattamento successivo; la seconda sull'asse delle ampiezze dove il segnale viene approssimato al livello di quantizzazione ["quanto"] più vicino in base alla risoluzione in bit del convertitore.

***Nota:** supponiamo di avere un livello di quantizzazione di un segnale ad 1 volt ed il successivo a 2 volt. Se durante il campionamento il segnale presenta una grandezza pari a 1,5 volt, in questo caso può essere attribuito indifferentemente all'uno o all'altro livello di quantizzazione, ovvero può essere "visto" sia come 1 volt che come 2 a seconda delle regole di attribuzione imposte allo strumento durante la costruzione. Normalmente questo effetto è trascurabile se la variazione del segnale da quantizzare è di un ordine di grandezza superiore alla dimensione del livello di quantizzazione.*

I convertitori A/D sono caratterizzati da due parametri fondamentali:

- Numero di livelli discreti con cui può essere descritta l'ampiezza del segnale.
- Periodo di campionamento.

## Teorema di Shannon

Teorema: *la frequenza di campionamento di un segnale deve essere*

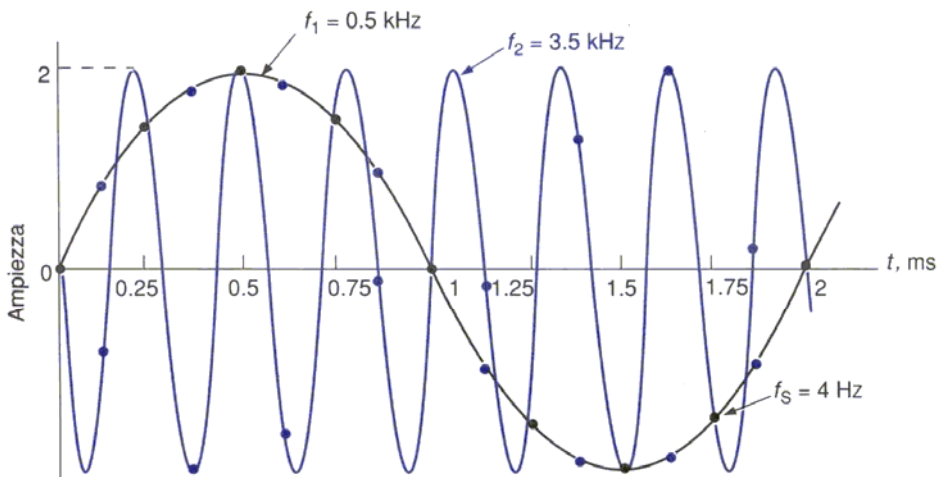
$$f_c \geq 2 f_{\max} \quad (2)$$

dove  $f_{\max}$  rappresenta la frequenza massima contenuta nel segnale, ed è anche conosciuta come frequenza di Nyquist, mentre  $f_c$  è la frequenza di campionamento.

Se nel campionare non si rispetta questa condizione, le componenti del segnale in ingresso ( il suono nel nostro esempio ) a frequenza maggiore vengono "sottocampionate" ovvero campionate con frequenza temporale troppo bassa e quindi ricompaiono nel segnale campionato come elementi a componenti frequenziali più basse secondo la seguente relazione:

$$f_{\text{aliasing}} = f_{\text{Nyquist}} - (f_{\text{vera}} - f_{\text{Nyquist}}) = 2 \cdot f_{\text{Nyquist}} - f_{\text{vera}} \quad (3)$$

Se per esempio analizziamo al computer lo spettro di un segnale "sweep", cioè un segnale con frequenza variabile in modo progressivo nel tempo, sottocampionato, si può vedere come lo spettro salga fino ad una determinata frequenza per poi tornare indietro come se rimbalzasse su di essa. Il fenomeno appena descritto è noto col nome di **aliasing**.



Esempio di aliasing. Le sinusoidi a 0.5 kHz (nera) e a 3.5 kHz (in colore) hanno la stessa ampiezza se queste forme d'onda vengono campionate ogni 0.25 ms (punti neri corrispondenti a una frequenza di campionamento di 4 kHz). Campionando invece ogni 0.125 ms (punti in colore corrispondenti a frequenza di campionamento di 8 kHz) si ottengono valori diversi per le ampiezze dei due segnali.

Figura 9: Aliasing

In generale lo spettro di una sequenza ottenuta per campionamento si ricava come periodicizzazione dello spettro del segnale analogico di partenza (Figura 5 a sinistra), con un periodo di ripetizione in frequenza pari alla frequenza di campionamento. Se però la frequenza di campionamento è tale che le varie repliche dello spettro centrate sui suoi multipli vengono a sovrapporsi (Figura 5 a destra), allora, interferiscono tra di loro sommandosi e generando l'errore di aliasing, e quindi la distorsione del segnale campionato.

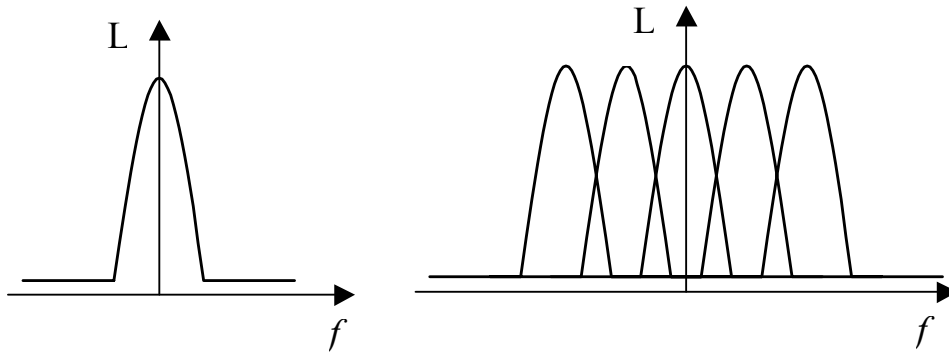


Figura 10

Se invece viene rispettata la condizione di Nyquist le diverse repliche dello spettro non si sovrappongono (Figura 6), consentendo di riprodurre il segnale senza distorsioni.

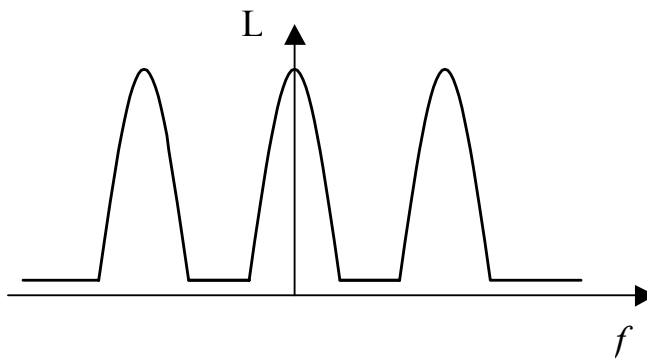


Figura 11

La frequenza limite utilizzabile per evitare aliasing è quella di Nyquist:

$$f_N = \frac{f_c}{2} \quad (4)$$

Un'altra possibilità per evitare aliasing si presenta quando abbiamo a che fare con segnali a banda  $B$  limitata: in questo caso la condizione da rispettare è la seguente:

$$f_c \geq 2B \quad (5)$$

Questa condizione ci suggerisce una tecnica per evitare problemi di aliasing:

si antepone al convertitore A/D di Figura 1 un filtro anti-aliasing che limiti la banda del segnale analogico ad un valore  $B'$  in modo da evitare l'aliasing per la frequenza di campionamento fissata.

Di fatto il filtro anti-aliasing si realizza tramite un filtro passa-basso in modo da eliminare dal segnale le frequenze più alte, cioè quelle superiori alla frequenza di Nyquist, che provocano aliasing. Chiaramente il taglio effettuato dal filtro deve essere tale da non ridurre eccessivamente la qualità del segnale stesso.

Un filtro passa-basso ideale ha un andamento caratterizzato da una caduta netta (Figura 7 in rosso). Di fatto però, tutti i filtri reali hanno una zona di caduta non trascurabile. L'ampiezza di questa è correlata al numero di bit del segnale e alla frequenza di Nyquist.

Un segnale per esempio a 16 bit ha un range in livello di 96 dB, ciò significa che un filtro per un segnale di questo tipo deve produrre una caduta di pari valore. Con una frequenza di campionamento di 44.1 kHz il filtro in questione è fisicamente realizzabile. I problemi sorgono quando si ha a che fare con segnali a 20 o più bit dove la caduta del filtro deve essere maggiore: la soluzione adottata è quella di aumentare la frequenza di campionamento (48-96 kHz) e quindi quella di Nyquist ampliando così sull'asse delle frequenze la zona di caduta del filtro che diviene realizzabile.

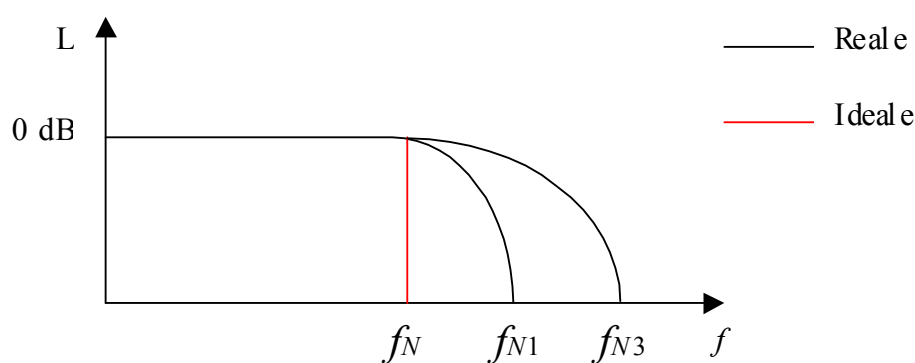


Figura 12: Filtri passa-basso

Oltre che per evitare l'aliasing, filtri come quelli appena descritti sono utilizzati quando il segnale audio campionato deve essere trasmesso, come in un sistema di radiodiffusione, dov'è importante ridurre al minimo il numero dei campioni/s. Infatti, più campioni devono essere trasmessi contemporaneamente, maggiore deve essere la capacità (e quindi il costo) del sistema di trasmissione. Per questo motivo in alcuni standard di radiodiffusione dell'audio digitale si campiona il segnale a 32 kHz. Questa frequenza non soddisfa chiaramente la condizione di Nyquist rispetto alla banda  $B=20$  kHz, cioè la banda udibile dall'orecchio umano, ma l'uso del filtro anti-aliasing risolve il problema mantenendo su di un livello accettabile la qualità audio.

## Analisi di Fourier e FFT

Teorema di Fourier: qualunque suono periodico è sempre rappresentabile come sovrapposizione di un opportuno numero d'onde sinusoidali (toni puri) di determinate ampiezze, frequenze e fasi:

$$x(\tau) = \sum_{i=1}^{N \rightarrow \infty} A_i \text{sen}(\omega_i \tau + \varphi_i) \quad (6)$$

La dipendenza dalle frequenze della (6) è espressa dalla seguente relazione:

$$\omega_i = 2\pi f_i \quad (7)$$

Il teorema di Fourier è lo strumento matematico che nello studio dei segnali ci consente di passare dall'analisi nel dominio del tempo a quella nel dominio delle frequenze, tramite l'omonima trasformata, dove ad essere studiato è lo spettro del segnale in funzione della frequenza, con la possibilità tramite l'antitrasformata di tornare al dominio temporale.